Quelques problèmes d'existence et de sélection de solutions d'équations implicites

Gisella Croce
LMAH
Université Le Havre Normandie

Résumé

L'exposé portera sur des problèmes de Dirichlet relatifs aux *équations implicites*, qui s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} F_i(x, u(x), Du(x)) = 0, & \text{p.p. en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et les applications $F_i : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}, i = 1, ..., m$ et $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ sont données.

Ces équations complètement nonlinéaires ont reçu beaucoup d'attention dans la littérature. Le cas scalaire, où $N = 1$, a été traité avec différentes approches (comme la théorie des solutions de viscosité, la construction pyramidale et le théorème des catégories de Baire) et l'existence de solutions est une question complètement résolue. Par contre, la sélection d'une solution est ouverte. En effet ce type de problèmes admet une infinité de solutions, en général. Par conséquent une question intéressante est d'en sélectionner et charactériser une. Nous proposerons une méthode de sélection de solutions pour un système d'équations eikonales.

Le cas vectoriel, où $N > 1$, a été traité dans la littérature à l'aide de deux théories différentes, mais dans les deux on utilise la notion d'enveloppe rang un convexe, une notion généralisée d'analyse convexe. Nous présenterons un résultat d'existence qui généralise ceux déjà présents dans la littérature avec la méthode des catégories de Baire, et traiterons une application. Par ailleurs, comme dans le cadre scalaire, une question intéressante est la sélection d'une solution. Nous décrirons un résultat pour un système aux valeurs singulières.