

# Suites automatiques : aspects arithmétiques

Jean-Marc DESHOUILLERS

Les deux questions suivantes sont des problèmes célèbres de Théorie de Nombres.

1. Écrivons  $\sqrt{2}$  en base 10 comme

$$\sqrt{2} = 1.414213562373\dots_{10} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}, \text{ say,}$$

et considérons le nombre réel  $\alpha$  qui, en base 11, a les mêmes chiffres que  $\sqrt{2}$  en base 10, c'est-à-dire que l'on a

$$\alpha = 1.414213562373\dots_{11} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 11^{-k}.$$

Le nombre  $\alpha$  est-il transcendant ?

2. Quelle est la répartition de la suite des parties fractionnaires de  $(3/2)^n$  ? Est-il vrai que ces valeurs sont "bien" réparties dans l'intervalle  $[0, 1[$  ?

Non seulement ces deux questions ne sont pas résolues, mais il n'est pas exclu que nous soyons loin de voir leur solution. Des questions similaires peuvent être formulées dans le cadre des séries entières sur un corps fini (en gros, on calcule comme avec les développements décimaux des réels, mais on ignore les retenues). Non seulement on sait résoudre ces deux questions dans ce cadre, mais en outre l'outil principal mis en œuvre dans leur résolution, les *automates finis*, joue un rôle important dans les mathématiques discrètes. Notre but est de présenter ces questions, ainsi que quelques questions ouvertes connexes, à une audience sans connaissance *a priori* sur les automates finis.