20000 LIEUES AUTOUR DE L'IDENTITÉ DE VIÉTE–EULER

VICTOR TCHOULAEVSKI

Le principal sujet de l'exposé concerne la régularité des mesures de probabilité des séries convergentes de variables aléatoires indépendantes,

$$S(\omega) = \sum_n a_n X_n(\omega),$$

où, par exemple, $\sum_n |a_n| < \infty$, mais $\{X_n\}$ sont i.i.d. avec la distribution de probabilité est très singulière. Le cas extrême est celui des v.a. de Bernoulli (symétriques ou non). Une méthode très souple et polyvalent d'étude de la régularité des v.a. est celle des transformées de Fourier (inverses, pour être plus plus précis) des mesures de probabilités, autrement appelées les fonctions caractéristiques. Par calcul mental, on trove que $\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX_n(\omega)} \right] = \cos t$ pour les variables de Bernoulli symétriques. En supposant que $a_n = 2^{-n}$, on obtient

$$\varphi_S(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(2^{-n} t\right)$$

or, d'après une identité établie par Leonhard Euler, à l'époque lointaine où un scientifique occidental pouvait trouver un environment de recherche confortable en Russie, on a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(2^{-n} t\right) = \frac{\sin t}{t},$$

Un cas particulier de l'identité d'Euler était trouvé par François Viété (1579 ou 1593, selon des sources différentes): pour $t = \pi/2$, on a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(2^{-n} \pi\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Il s'agit d'un fait purement analytique, mais qui admet une interprétation en termes de la théorie de mesure: la mesure de probabilité de la somme $S(\omega) = \sum_n 2^{-n} X_n(\omega)$ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Preuve: appliquez le développement dyadique d'un nombre réel $x \in [0,1)$.

Naturellement, il y un grand nombre de paramètres que l'on peut varier: la structure de la série ($n \in \mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2, \ldots$), la vitesse de décroissance des coefficients a_n, et la nature exacte de la mesure de probabilité commune des v.a. i.i.d. X_n.

De tels problèmes, qui se situent à l'interface des l'analyse "déterministe" et de la théorie des probabilité, ont été rencontrés dans les disciplines mathématiques différentes (surtout du point de vue du CNU). Le lemme de Riemann–Lebesgue affirme qu la transformée de Fourier d'une fonction (pour simplicité, à support compact) intégrable tend vers zéro à l'infinie, mais qu'en est-il pour les mesures (disons, toujours à support compacte)? Rajchman a étudié cette question dans un cadre assez général aux années 1920; on appelle aujourd''hui les mesures μ t.q. $\exists \lim_{|t|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} d\mu(x) = 0$ *mesures de Rajchman*. Hélas, une caractérisation assez générale, explicite et efficace pour de multiples applications nous échappe toujours, malgré des efforts considérables et les résultats variés et profonds obtenus par les mathématicien(ne)s de plusieurs générations réuni(e)s par un trait commun: un manque de respect aux frontières "bureaucratiques" entre les sous-disciplines mathématiques: Menchoff, Bari, Riesz, Wiener, Wintner, Hardy, Littlewood, Zygmund, Strichartz, Kahane, Salem. Lorsque a_n décroissent moins vite qu'exponentiellement, on peut regrouper les termes de la série $\sum a_n X_n$ en intervalles de plus en plus longues et s'attendre à l'émergence de la loi gaussienne (en vertu du théorème limite central). Sous cet angle, le problème en question est lié à la problématique classique en probabilités et statistiques et aux développements asymptotique des lois limites étudiés par Tchébychev, Edgeworth, Bruns, Charlier, Cramèr, Cornish, Fisher ... L'apparition de l'exponentielle q^{-n} dans l'argument du cosinus (ou d'une fonction quasi-périodique plus générale) dans

$$\ln \prod_{n=1}^{+\infty} \left| \cos\left(q^{-n}t\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left| \cos\left(q^{-n}t\right) \right|\right.$$

soulève des questions assez délicates et difficiles concernant l'équidistribution des trajectoires des systèmes dynamiques et propriétés algébriques des réels $q > 1$ (nombres de Pisot–Vijayaraghavan etc.). Les convolutions peuvent être considérées dans des groupes commutatifs plus généraux que $\mathbb{R}^d$.

Naturellement, un exposé ne peut jamais couvrir une problématique aussi large; le but est d'attirer l'attention des collègues aux liens très intéressants est souvent inattendus entre plusieurs thématiques de nature différente.

UNIVERSITÉ DE REIMS, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, 51687 REIMS CEDEX, FRANCE
E-mail address: victor.tchoulaevski@univ-reims.fr